

# Bifurkácie v ekonomických modeloch

**Modelovanie ekonomických systémov**

**semestrálna práca**

**Viktor Bachratý**

Abstrakt

*Práca sa v prvej časti zaoberá matematickou teóriou systémov modelovaných pomocou sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc. Podrobnejšie rozoberá podmienky stability takýchto systémov, a uvádza základné prípady bifurkácií, pričom dôraz kladie na prípad Hopfovej bifurkácie. Táto práca je súčasťou appletu napísaného v jazyku Jython, ktorý umožňuje spomínané modely simulovať resp. ich upravovať alebo vytvárať nové modely. Ďalej sa práca venuje ekonomickému modelu, ktorý je založený na Kaldorovom modeli obchodného cyklu a bol vytvorený autormi v citovaných prácach. Na tomto modeli využíva poznatky z teórie bifurkácií a matematické výsledky sa snaží interpretovať a podložiť simuláciami pomocou spomínaného appletu. Applet je dostupný online a je priamo spustiteľný v ľubovoľnom prehliadači podporujúcom Virtuálny stroj Java.*

## Obsah

1 Úvod.....	3
2 Matematická analýza.....	4
Stacionárne body.....	4
Bifurkácie.....	11
3 Lorenzov atraktor.....	18
4 Kaldorov model .....	21
5 Záver.....	28
6 Príloha: Technická dokumentácia k appletu SimApp.....	29
Vlastnosti appletu.....	29
7 Literatúra: .....	33

# 1 Úvod

Bifurkačná analýza má využitie v rôznych oblastiach vedy, počnúc biologickými systémami cez mechaniku kvapalín, klimatológiu až po ekonomické modely. Vo všeobecnosti každý spojitý časovo závislý proces možno opísať sústavou diferenciálnych rovníc. Bifurkačná analýza je vlastne vyšetovanie vlastností diferenciálnych rovníc s jedným alebo viacerými parametrami. Pomocou nej dokážeme určiť, za akých podmienok sa systém bude správať deterministicky, či už bude konvergovať do nejakého stabilného stavu, resp. vytvorí sa cyklus stavov, medzi ktorými sa bude pohybovať, alebo bude divergovať do chaosu. V tejto práci sú niektoré vzťahy názorne odvodené avšak exaktné matematické dôkazy a dôsledné odvodenia presahujú jej rámec, cieľom je priblížiť základné vzťahy potrebné k analýze konkrétneho príkladu.

## 2 Matematická analýza

System diferenciálních rovnic je vyjádřený ako:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Aby bol model úplný potrebujeme vedieť počiatočný stav, teda vektor  $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  musí byť definovaný. V prípade, že systém je lineárny, t.j. funkcia  $f_i$  je tvaru  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1} * x_1 + a_{i2} * x_2 + \dots + a_{in} * x_n$  môžeme ho zapisovať vo vektorovom tvare:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = A \vec{x} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\tag{2.2}$$

### Stacionárne body

Stacionárny bod (equilibrium) je definovaný nasledovne:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n\tag{2.3}$$

Stacionárny bod je teda bod, v ktorom je sú prírastky funkcie nulové, teda derivácia je rovná nule. To znamená, že z tohto bodu sa systém už nedostane. Podľa toho, či systém do neho konverguje, resp. od neho diverguje, rozoznávame stabilné a nestabilné stacionárne body.

### Topologická klasifikácia stacionárnych bodov

Tok systému je množina všetkých možných trajektórií riešenia t.j. trajektórií zo všetkých možných počiatočných bodov:

$$\Phi_i(\vec{x}(t)) = \{(x_1(t, x_1^0), x_2(t, x_2^0)) \mid (x_1^0, x_2^0) \text{ je počiatočný bod}\}\tag{2.4}$$

Pomocou toku sústavy možno definovať stability stacionárnych bodov:

- Pevný bod  $\vec{x}^*$  je podľa Ljapunova lokálne stabilný, ak pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  také, že platí:

$|\vec{x}(0) - \vec{x}'| \leq \delta \rightarrow |\Phi_t(\vec{x}(0)) - \vec{x}'| \leq \epsilon$  pre  $\forall t$  tzn. odchýlka od pevného bodu ostáva stále na nejakom jeho okolí  $\epsilon$ .

- Pevný bod  $\vec{x}'$  je asymptoticky stabilný práve vtedy a len vtedy, existuje  $\delta > 0$  také, že platí:  $|\vec{x}(0) - \vec{x}'| \leq \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(\vec{x}(0)) - \vec{x}'| = 0$  tzn. odchýlka od pevného bodu limitne konverguje k 0.

- Pevný bod  $\vec{x}'$  je globálne asymptoticky stabilný práve vtedy ak platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(\vec{x}(0)) - \vec{x}'| = 0 \text{ pre } \forall \text{ počiatočný bod } \vec{x}(0)$$

V prípade jednorozmerného systému platí, že ak  $f'(x) < 0$ , stacionárny bod je stabilný – má príťažlivý účinok, je to atraktor, ak  $f'(x) > 0$  stacionárny bod má odpudivý charakter.

V prípade dvojrozmerného systému je možností viacej. Ak je systém lineárny, vlastnosti rovnovážneho bodu sa určujú pomocou vlastností vlastných čísel matice A. Ak systém nie je lineárny, tak ho môžeme linearizovať v okolí stacionárneho bodu. Platí to však iba za predpokladu, že vlastné čísla matice A majú nenulovú reálnu časť  $\Re(\lambda_{1,2}) \neq 0$ . Takéto stacionárne body sa nazývajú hyperbolické stacionárne body. V opačnom prípade sa jedná o nehyperbolické stacionárne body, ktorých stabilita sa musí určiť priamo. Linearizovaný systém bude mať maticu A zhodnú s Jakobiánom pôvodnej sústavy – t.j. maticou parciálnych derivácií pôvodnej sústavy:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = J \vec{x} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Vlastné číslo a vlastný vektor matice A sú definované nasledovne:

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (2.6)$$

kde  $\vec{v}$  je vlastný vektor, a  $\lambda$  je vlastné číslo. Úpravou dostaneme tvar:

$$(A - \lambda I) \vec{v} = 0 \quad (2.7)$$

Rovnica má triviálne riešenie ak vektor  $\vec{v}$  je nulový. V opačnom prípade vlastné čísla sú riešením charakteristickej rovnice matice A. Tá je definovaná ako determinant jej rozdielu s diagonálnou maticou, ktorej diagonálu tvoria vlastné čísla matice A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.8)$$

Takto pre dvojrozmerný prípad dostávame charakteristickú rovnicu tvaru:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q \quad (2.9)$$

Kde konštanty  $p, q$  sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned} p &= \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \\ q &= \det(A) = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pričom funkcia *trace* je suma čísiel na diagonále matice a *det* je determinant matice.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_i a_{ii} \quad (2.11)$$

Riešenia charakteristickej rovnice – vlastne čísla  $J$  teda sú čísla:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

takto dostávame 2 riešenia pre dvojrozmerný prípad.

Základné typy stacionárnych bodov sa delia do troch skupín:

Atraktory	$p > 0, q > 0$	$\Re(\lambda_{1,2}) < 0$
Repelery	$p < 0, q > 0$	$\Re(\lambda_{1,2}) > 0$
Sedlové body	$q < 0$	$\Re(\lambda_1) < 0, \Re(\lambda_2) > 0$

Atraktory sú stabilné body, ktoré priťahujú, správajú sa ako výlevky, teda systém konverguje k nim, tečie do nich – trajektórie smerujú do nich. Podmienka pre takéto body je, že  $p, q$  sú kladné čísla, teda reálna časť vlastných čísel je záporná.

Odpudzujúce nestabilné body sa správajú ako zdroje, teda systém od nich diverguje, ako keby prúd vytekal z nich – trajektórie vychádzajú z nich. Podmienka pre takéto body je, že  $p$  je kladné a  $q$  záporné čísla, teda reálna časť vlastných čísel je kladná.

Sedlové nestabilné body sú také, ktoré v jednom smere priťahujú a v druhom, na neho kolmom odpudzujú. Podmienka pre tieto body je, že  $q$  je záporné a vlastné čísla majú opačné znamienka.

Všetky ďalej uvádzané stacionárne body vznikajú na nasledovnom lineárnom modeli:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (2.13)$$

Charakteristická rovnica modelu:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \lambda^2 + (a+d)\lambda + ad - bc \quad (2.14)$$

Stacionárny bod:  $E=(0,0)$

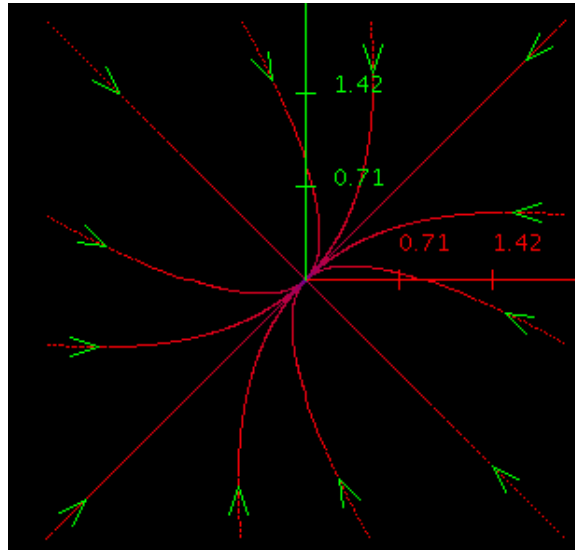
**Stabilný uzol** - trajektórie vstupujú priamo

Vzniká, ak vlastné čísla sú reálne a obe sú záporné.

Matica A znázorneného modelu:  $a=-3$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $d=-3$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(0.5, 2); (-0.5, 2); (0.5, -2); (-0.5, -2); (2, 0.5); (2, -0.5); (-2, 0.5); (-2, -0.5); (-2, -2); (-2, 2); (2, -2); (2, 2);$



*Obr. 1: Stabilný uzol*

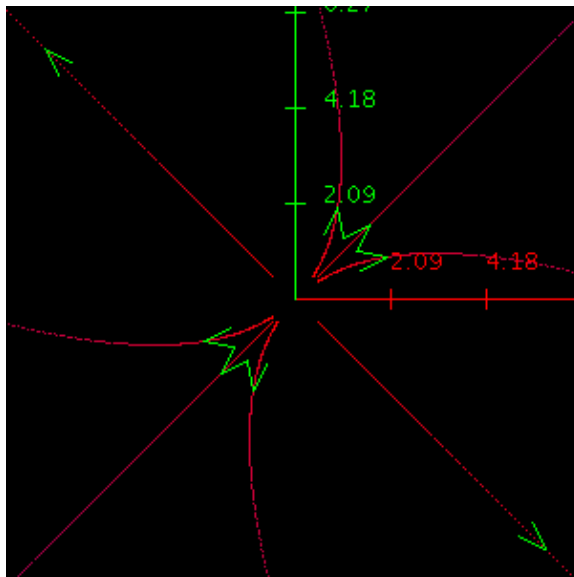
**Nestabilný uzol** - trajektórie vystupujú priamo

Vzniká, ak vlastné čísla sú reálne a obe sú kladné.

Matica A znázorneného modelu:  $a=3$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ ,  $d=3$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(0.5, 0.4); (0.4, 0.5); (0.5, 0.5); (-0.5, 0.5); (0.5, -0.5); (-0.5, -0.4); (-0.4, -0.5); (-0.5, -0.5);$



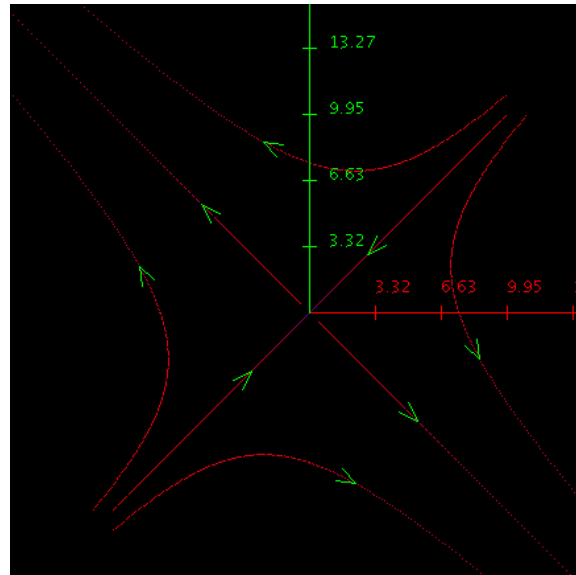
*Obr. 2: Nestabilný uzol*

**Sedlový bod** – v jednom smere priťahuje a v druhom odpudzuje  
Vzniká, ak vlastné čísla sú reálne a majú rozdielne znamienka.

Matica A znázorneného modelu:  $a=1$ ,  $b=-3$ ,  $c=-3$ ,  $d=1$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(0.5,-0.5);(-0.5,0.5);(10,10);(-10,-10);(11,10);(10,11);(-11,-10);(-10,-11);$



Obr. 3: Sedlový bod

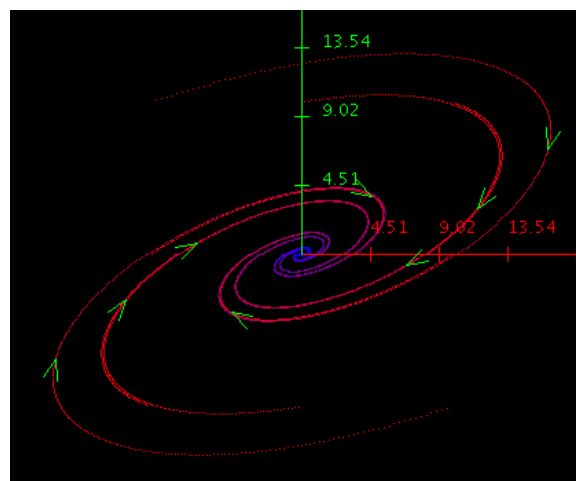
**Navíjajúca sa špirála** – trajektórie smerujú do stredu špirály

Vzniká, ak vlastné čísla sú komplexné a obe majú záporné reálne časti.

Matica A znázorneného modelu:  $a=-3$ ,  $b=6$ ,  $c=-2$ ,  $d=1$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(-10,-10);(-10,0);(-10,10);(10,-10);(10,0);(10,10);(0,-10);(0,10);$



Obr. 4: Navíjajúca sa špirála



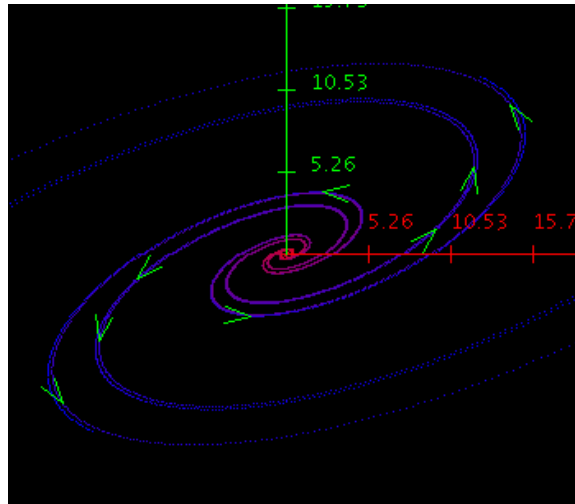
**Odvíjajúca sa špirála** – trajektórie smerujú von zo stredu špirály

Vzniká, ak vlastné čísla sú komplexné a obe majú kladné reálne časti.

Matica A znázorneného modelu:  $a=3$ ,  $b=-6$ ,  $c=2$ ,  $d=-1$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(-0.10,-0.10);(-0.10,0);(-0.10,0.10);(0.10,-0.10);(0.10,0);(0.10,0.10);(0,-0.10);(0,0.10);$



Obr. 5: Odvíjajúca sa špirála

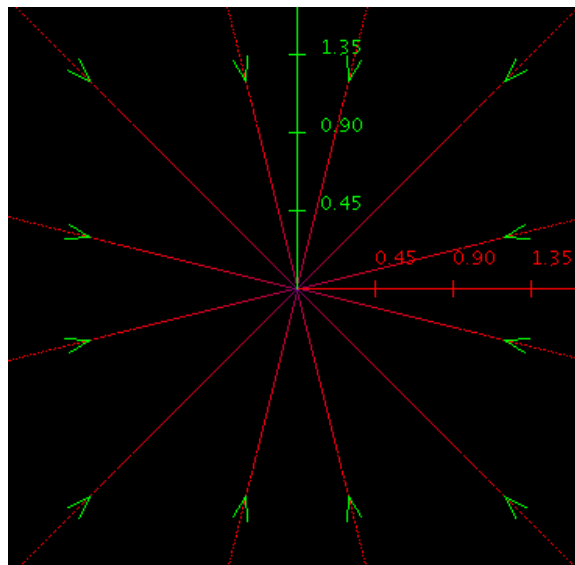
**Stabilná sa hviezda** – trajektórie smerujú po priamkach do stredu

Vzniká, ak vlastné čísla sú reálne, rovnajú sa a obe majú kladné reálne časti.

Matica A znázorneného modelu:  $a=-2$ ,  $b=0$ ,  $c=0$ ,  $d=-2$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(0.5, 2);(-0.5, 2);(0.5, -2);(-0.5, -2);(2, 0.5);(2, -0.5);(-2, 0.5);(-2, -0.5);(-2,-2);(-2,2);(2,-2);(2,2);$



Obr. 6: Stabilná sa hviezda

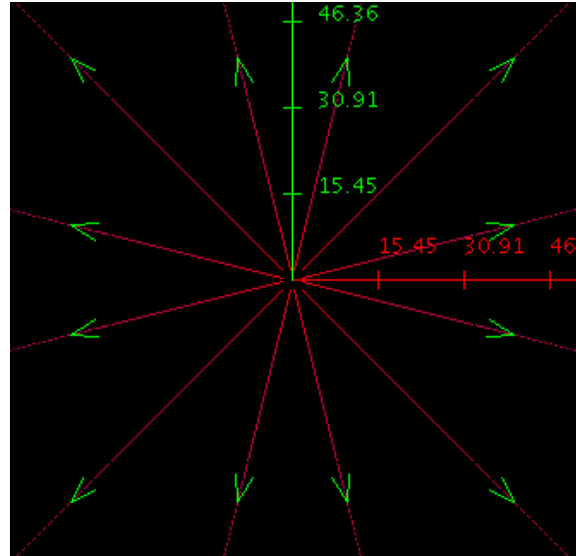
**Nestabilná sa hviezda** – trajektórie smerujú po priamkach do stredu

Vzniká, ak vlastné čísla sú reálne, rovnajú sa a obe majú kladné reálne časti.

Matica A znázorneného modelu:  $a=-2$ ,  $b=0$ ,  $c=0$ ,  $d=2$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

$(0.5, 2); (-0.5, 2); (0.5, -2); (-0.5, -2); (2, 0.5); (2, -0.5); (-2, 0.5); (-2, -0.5); (-2, -2); (-2, 2); (2, -2); (2, 2);$



*Obr. 7: Nestabilná sa hviezda*

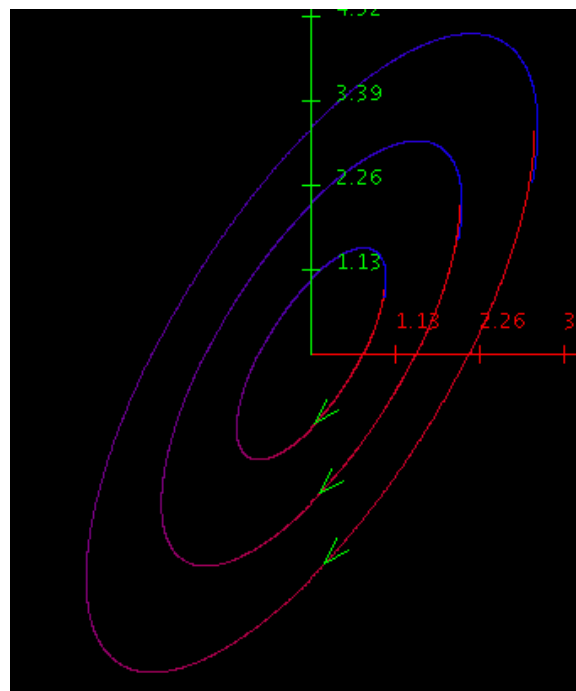
**Elipsa** – trajektórie vytvárajú elipsy okolo stacionárneho bodu

Vzniká, ak vlastné čísla sú rýdži imaginárne.

Matica A znázorneného modelu:  $a=-1$ ,  $b=1$ ,  $c=-2$ ,  $d=1$

Počiatočné body znázorneného fázového diagramu:

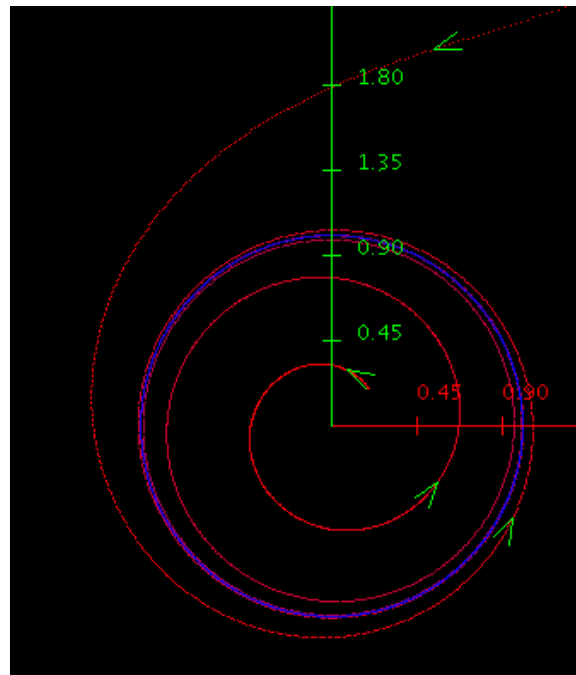
$(1,1); (2,2); (3,3);$



*Obr. 8: Elipsa*

## Limitný cyklus

Oproti lineárnym systémom sa v nelineárnych môže navyše objaviť nový fenomén – limitný cyklus. Tento jav vzniká, keď atraktorom nie je jeden bod ale nejaký uzavretý cyklus. Trajektória z bodu mimo



Obr. 9: Limitný cyklus

tohto cyklu sa potom k nemu približuje (vzdďľahuje) po špirálovitej dráhe, až kým sa s ním v nekonečne nestotožní. Definícia: Uzavretá fázová trajektória sa nazýva limitný cyklus, práve vtedy ak je izolovaná od iných uzavretých trajektórií, teda existuje nenulové okolie neobsahujúce iné uzavreté trajektórie.

Existujú 3 typy limitných cyklov:

**Stabilné** – správajú sa ako atraktor, teda trajektórie priťahuje, ktoré sa približujú k nemu po špirálovitej dráhe, ak t konverguje do nekonečna

**Nestabilné** – správajú sa ako repeler, teda trajektórie odpudzuje, ktoré sa vzdďľahujú od neho po špirálovitej dráhe, ak t konverguje do nekonečna

**Polostabilné** – na jednej zo strán ( vnútornej, resp. vonkajšej ) priťahuje a na druhej odpudzuje – z jednej sa trajektórie navijajú a z druhej sa vzdďľahujú

## Bifurkácie

Bifurkácia v matematickej analýze dynamických systémov je jav, keď sa malou zmenou parametra zásadne zmení dlhodobé správanie systému. Predstavme si diferenciálnu rovnicu, ktorá obsahuje parameter  $\alpha$ :

$$\partial \vec{x} / \partial t = f(\vec{x}, \alpha) \quad (2.15)$$

Pri zmene parametra môže nastať zmena kvantitatívna alebo kvalitatívna. V prvom prípade sa graf napríklad posunie, bude strmší alebo pod. V druhom prípade pri prekročení hranice nastane zmena topológie grafu. Vtedy nastala bifurkácia.

Rozlišujeme 2 typy bifurkácií – lokálne a globálne. Lokálna bifurkácia je zmena stability stacionárneho bodu, periodického cyklu, alebo invariantnej množiny, vyvolaná malou zmenou parametra systému. Globálne sú také, pri ktorých sa mení stabilita systému v dôsledku viacerých faktorov, takéto bifurkácie nie sú analyzovateľné iba pomocou stability stacionárnych bodov. V ďalšej časti sa budeme venovať lokálnym bifurkáciám.

### Lokálne bifurkácie

Tento typ bifurkácií nastáva pri zmene jedného alebo viacerých parametrov a prejavuje sa zmenou topológie systému na určitom okolí

#### Jednorozmerný systém

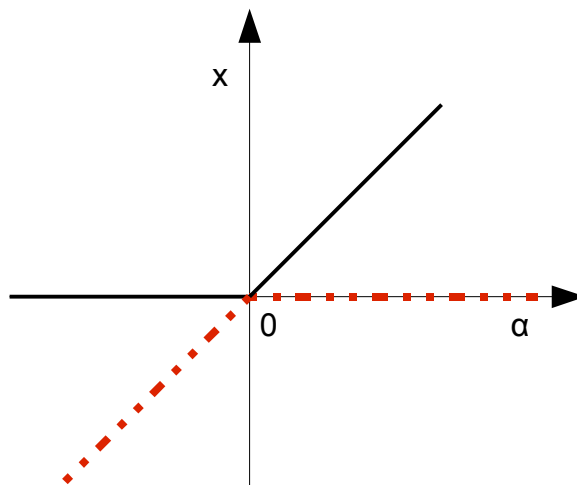
V jednorozmernom systéme sa môže vyskytovať transkritická a tangenciálna bifurkácia.

#### Transkritická bifurkácia (transcritical bifurcation)

Je to najjednoduchší prípad. Pôvodná sústava má 2 stacionárne body, jeden stabilný a druhý nestabilný. Ako sa tieto body pri zmene parametra postupne pohybujú, kolidujú a v bode kolízie zmenia stabilitu. Vyskytuje sa v nasledovnom modeli:

$$\partial x / \partial t = f(x) = x(\alpha - x) \quad (2.16)$$

Stacionárne body sú body 0 a  $\alpha$ . Stabilita sa dá overiť pomocou derivácie funkcie  $f'(x) = \alpha - 2x$ . Ak je  $\alpha < 0$ , rovnovážny bod  $x = 0$  je stabilný, ak  $\alpha > 0$ , potom je nestabilný. Pre druhý bod  $x = \alpha$  je stabilita opačná ako v prvom prípade. Ak je  $\alpha = 0$ , tak systém má len jeden stacionárny bod v bode 0. V tomto bode nastáva bifurkácia – obr. 10. Ako vidno, ak  $\alpha$  prechádza bodom 0, nulový stacionárny bod sa zmení zo stabilného (čierna) na nestabilný (červená) a stacionárny bod  $x = \alpha$  sa zmení z nestabilného na stabilný.



Obr. 10: Stabilita stacionárneho bodu pri transkritickej bifurkácii

## Tangenciálna bifurkácia (tangential bifurcation)

V tejto bifurkácii ide o spojenie dvoch stacionárnych bodov do jedného, ktorý pri ďalšej zmene parametra úplne zmizne. Príkladom je nasledovný model:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= f(x) = x^2 - \alpha \\ x_1 &= -\sqrt{\alpha} \quad x_2 = \sqrt{\alpha} \\ f'(x) &= 2x \end{aligned} \tag{2.17}$$

V tomto modeli máme 2 stacionárne body  $x_1, x_2$  za predpokladu, že  $\alpha > 0$ . Jeden je stabilný a druhý je nestabilný. Ak  $\alpha$ , klesá, stacionárne body sa približujú až kým sa nespoja do jedného stabilného pevného bodu. Ak je  $\alpha < 0$ , reálne atraktory neexistujú.

## Hopfova (Andronov-Hopfova) bifurkácia

Je to častý prípad lokálnej bifurkácie nelineárnej funkcie. Vyznačuje sa tým, že pri variácii bifurkačného parametra alebo parametrov sa stráca stabilita fixného bodu, ktorý zaniká a vzniká namiesto neho limitný cyklus. Podľa toho, či je cyklus stabilný alebo nestabilný, rozlišujeme superkritickú a subkritickú Hopfovu bifurkáciu. Pri Hopfovej bifurkácii pár komplexne konjugovaných vlastných čísel Jakobiánu linearizácie systému pretína imaginárnu os – t.j. v bode bifurkácie sú rýdzo imaginárne. Systém prechádza zo stabilného bodu do limitného cyklu s určitou amplitúdou. Tento cyklus je stabilný, ak prvý Ljapunovov koeficient je negatívny, čiže bifurkácia je superkritická. V opačnom prípade je bifurkácia subkritická.

Podmienky vzniku Hopfovej bifurkácie:

Nech je daný nelineárny dynamický systém s parametrom  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= f_1(\alpha, x_1, x_2) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= f_2(\alpha, x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.18}$$

ktorý má stacionárny bod v začiatku súradnicovej sústavy pre všetky hodnoty parametra  $\alpha$ . Ďalej nech pri hodnote  $\alpha = \alpha_0$  sú vlastné čísla linearizovanej sústavy rýdzo imaginárne. Ak pre reálne časti vlastných čísel platí podmienka že reálna časť ich derivácie podľa parametra je kladná,  $\partial/\partial\alpha\{\Re[\lambda_{1,2}(\alpha)]\} > 0$  a stacionárny bod je asymptoticky stabilný, potom v ňom vzniká pri hodnote parametra  $\alpha_0$  Hopfova bifurkácia.

Normálna forma Hopfovej bifurkácie:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x(\delta + b|x|^2) \quad b = \alpha + \beta i \tag{2.19}$$

pričom  $x, b$  sú vo všeobecnosti komplexné čísla a  $\delta$  je sledovaný parameter. Potom prvý Ljapunovov koeficient je číslo  $\alpha$ .

### Superkritická Hopfova bifurkácia:

Ak  $\alpha < 0$ , tak pre  $\delta > 0$  vzniká stabilný limitný cyklus:

$$x(t) = r e^{i\omega t}, \text{ kde polomer } r \text{ a uhlová rýchlosť } \omega = \beta r^2$$

### Subkritická Hopfova bifurkácia:

Ak  $\alpha > 0$ , tak pre  $\delta < 0$  vzniká nestabilný limitný cyklus:

$$x(t) = r e^{i\omega t}, \text{ kde polomer } r \text{ a uhlová rýchlosť } \omega = \beta r^2$$

Hopfove bifurkácie vznikajú v známych systémoch ako Hodgkin-ov-Huxley-ho model neurónu, Belousov-Zabotinského reakcii, alebo najznámejšom príklade chaotického správania sa systému – Lorenzovom atraktore.

### Niemark-Sackerova bifurkácia

Je to zvláštny prípad Hopfovej bifurkácie, ktorá prebehne na stabilnom limitnom cykle. Predstavme si limitný cyklus v trojrozmernom priestore a špirálu k nejakému bodu patriacemu do cyklu na jeho priereze. Tento bod stratí rovnováhu a stane sa nestabilným, prebehne na ňom Hopfova bifurkácia. Predstavme si, že to prebehne na každom bode, vznikne tým anuloid okolo pôvodného limitného cyklu. Takejto bifurkácii hovoríme Neimark-Sackerova.

### Bifurkácia sedlo-uzol (Saddle-node)

Je to prípad lokálnej bifurkácie, v ktorej dva stacionárne body anihilujú do jedného. Je to analogický prípad k tangenciálnej bifurkácii v jednorozmernom priestore. Nazýva sa sedlo-uzol preto, lebo jeden stacionárny bod je stabilný (uzol) a druhý je nestabilný (sedlo).

Normálna forma:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha + x^2 \quad (2.20)$$

Ak  $\alpha < 0$ , máme 2 stacionárne body a to stabilný  $-\sqrt{-\alpha}$  a nestabilný  $+\sqrt{-\alpha}$ .

Ak  $\alpha = 0$ , máme práve 1 stacionárny bod

Ak  $\alpha > 0$ , stacionárne body neexistujú

Klesaním parametra v bode 0 sa stacionárne body zlúčia a pri ďalšom klesaní aj zlúčený bod zanikne.

### Nadkritická bifurkácia (Transcritical bifurcation)

Táto bifurkácia podobne ako v jednorozmernom prípade aj tuto sa jedná o stretnutie 2 stacionárnych bodov s opačnou stabilitou a výmena ich stability. Na to, aby sa vyskytla aj v 2D priestore, vždy musí byť jedno z vlastných čísiel nulové.

Podmienky:

$$\begin{aligned} f(0, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}(0, 0) &> 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Normálna forma:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r x - x^2 \quad (2.22)$$

Typickým príkladom je rovnica spotrebiteľ- producent, v ktorom spotreba je úmerná k množstvu poskytovaného tovaru:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r x (1 - x) - p x$$

- $r x (1 - x)$  je logistická funkcia produkcie tovaru  $x$
- $p x$  je spotreba úmerná k množstvu tovaru  $x$

### Zdvojenie periódy (period doubling bifurcation, flip bifurcation)

Je to prípad bifurkácie, keď systém zmení správanie tak, že vzniká trajektória s dvojitou periódou pôvodného systému. Vyskytuje sa iba v diskretných systémoch. Po určitej počte iterácií vzniká chaotické správanie systému. Existuje aj opačný prípad, kde perióda sa rozpoľuje, takáto bifurkácia vedie systém z chaosu k jednoduchšiemu deterministickému poriadku.

Podmienky:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= -1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) < 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) &< 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Potom máme intervaly  $(\alpha_1, 0), (0, \alpha_2)$   $\alpha \in > 0$  také, že platí:

- Ak  $\alpha \in (0, \alpha_2)$  tak  $f(x)$  má jeden nestabilný stacionárny bod a jeden orbit, s periódou dva, pre  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$
- Ak  $\alpha \in (\alpha_1, 0)$  tak  $f(x)$  má jeden stabilný stacionárny, pre  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$

Najjednoduchšia funkcia obsahujúca tento typ bifurkácie je

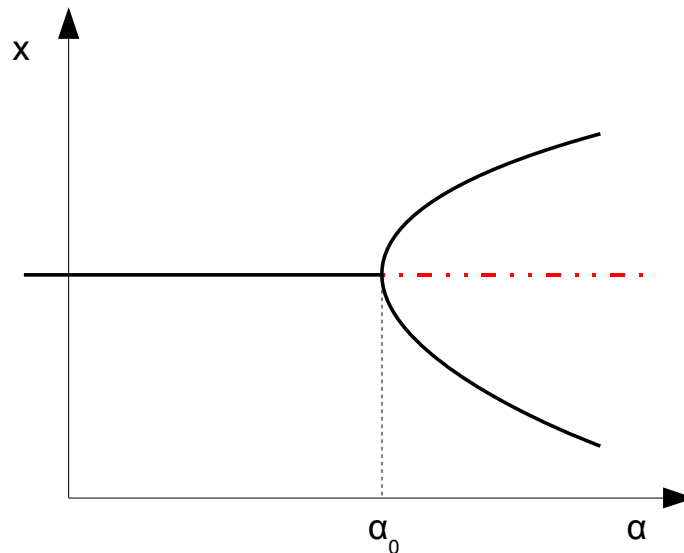
$$f(x) = \alpha - x - x^2 \quad (2.24)$$

V ekonomických modeloch je typickým príkladom Philipsova krivka.

### Vidlová bifurkácia (pitchfork bifurcation)

Táto bifurkácia sa podobne ako Hopfova, vyskytuje v dvoch formách – subkritickej a superkritickej.

Vzniká v systémoch, ktoré sú symetrické. Je podobná ako rozdvojenie periódy, len pôvodný stacionárny bod nezanikne, ale iba zmení stabilitu. V prípade superkritickej stabilný stacionárny bod sa zmení na nestabilný a vzniknú dva ďalšie stabilné stacionárne body. V prípade subkritickej nestabilný bod sa zmení na stabilný a vznikajú ďalšie dva nestabilné stacionárne body.



Obr. 11: Stabilita stacionárneho bodu pri superkritickej vidlovej bifurkácii

Podmienky:

$$\begin{aligned}
 -f(x, \alpha) &= f(-x, \alpha) \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha_0) &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \alpha_0) &= 0 & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, \alpha_0) &\neq 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, \alpha_0) &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}(0, \alpha_0) &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Ak je funkcia  $f$  nepárna, jej prvá a druhá derivácia podľa  $x$  v bode  $\alpha_0$  je nulová, a tretia je nenulová, prvá derivácia podľa parametra je tiež nulová a zmiešaná derivácia podľa  $x$  a parametra je rozdielna od nuly, tak v bode  $(0, \alpha_0)$  vzniká vidlová bifurkácia. Podľa toho, či je tretia derivácia kladná alebo záporná, sa rozlišuje subkritický a superkritický príklad.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, \alpha_0) \begin{cases} < 0 & \text{superkritická} \\ > 0 & \text{subkritická} \end{cases}
 \tag{2.26}$$

Normálna forma:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha x - x^3 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \alpha x + x^3
 \tag{2.27}$$

Vľavo je normálna forma subkritickej a vpravo superkritickej vidlovej bifurkácie.



## Globálne bifurkácie

Globálne bifurkácie sa vyskytujú ak väčšie invariantné množiny, ako napríklad periodické orbity alebo limitné cykly kolidujú s rovnovážnymi bodmi. Spôsobuje to zmenu v celkovej topológii, ktorá sa nedá vyšetriť iba na nejakom malom okolí ako v prípade lokálnych bifurkácií. Zmeny v topológii sa môžu vzťahovať na ľubovoľne veľkú oblasť fázového priestoru.

Príkladmi najčistejších globálnych bifurkácií sú:

**Homoklinická bifurkácia** - kolízia stabilného orbitu (limitného cyklu) so sedlovým bodom, vzniká orbit, ktorý obsahuje sedlový bod – v ňom sa nachádza zlom, keďže sedlový bod v jednom smere priťahuje a v druhom odpudzuje. Orbit vychádza a končí v tom istom sedlovom bode.

**Heteroklinická bifurkácia** - kolízia limitného cyklu s viacerými sedlovými bodmi, podobne ako v prípade homoklinickej bifurkácie vzniká orbit, ktorý však vychádza v jednom a končí v inom sedlovom bode.

**Bifurkácia s nekonečnou periódou** – na limitnom cykle vzniknú súčasne dva stacionárne body, pri určitej hodnote parametra sa rýchlosť oscilácií znižuje a perióda limitného cyklu dosiahne nekonečno.

## Kodimenzia (Codimension)

Je to počet parametrov, ktoré sa musia súčasne zmeniť, aby vznikla bifurkácia. Je to vlastne dimenzia podprieštoria množiny parametrov ktoré spôsobujú bifurkáciu z celého priestoru parametrov, ktoré môžeme meniť. Veľmi známa a dobre analyzovaná bifurkácia kodimenzie 2 je Bogdanov-Takens-ova bifurkácia, pri ktorej dochádza pri variácii dvoch parametrov k trom bifurkáciám súčasne – jednej bifurkácii sedlo-uzol, Hopfovej bifurkácii a homoklinickej bifurkácii.

### 3 Lorenzov atraktor

Jeden z najznámejších modelov, na ktorých možno pozorovať rôzne druhy bifurkácií a vznik chaosu je matematický model atmosféry vytvorený Edwardom Lorenzom. Autor pozorovaním zistil, že počasie sa nie vždy správa tak, ako by to predpokladal jeho model. Všimol si, že malé zmeny v počiatočných podmienkach vyvolávajú úplne odlišné výsledky. Táto citlivosť na počiatočné podmienky sa nazýva ako "efekt motýlych krídel". Jednoduchá interpretácia hovorí, že zatrepotanie krídlami motýľa v nejakej časti sveta môže vyvolať tornádo v úplne inej časti sveta. Zjednodušením pôvodného modelu s dvanástimi premennými získal sústavu 3 diferenciálnych rovníc ktoré majú pri určitých začiatočných podmienkach trajektóriu zhodou okolností pripomínajúcu motýlie krídla. Pôvodná vlastnosť, že malá zmena počiatočného bodu o jednu desaťtisícinu sa po určitom počte iterácií (pri inak konštantných parametroch) vyvolá zásadnú zmenu vo vývoji systému, zostala zachovaná. Základom sú nasledovné rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho-z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{3.1}$$

Z technického hľadiska ide o nelineárny trojrozmerný deterministický systém. Je dokázané, že pri určitých parametroch má systém chaotické správanie a jeho atraktor je zvláštny (divný) atraktor. Jeho Hausdorfova dimenzia je približne 2.06. Typicky sa parametre zvyknú nastavovať na  $\sigma = 10$   $\rho = 28$   $\beta = 8/3$ , vtedy vzniká trajektória tvaru motýlych krídiel.

**Stacionárne body:**

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ x(\rho-z) - y \\ xy - \beta z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \begin{array}{l} \text{triviálne riešenie } \vec{x} = (0,0,0) \\ \vec{x}_{c1} = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \\ \vec{x}_{c2} = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \end{array}\tag{3.2}$$

Jakobián v tomto bode bude:

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho-z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}\tag{3.3}$$

Aby sme predišli výpočtu kubickej rovnice, môžeme vlastné čísla počítať pomocou definície ako determinant rozdielu Jakobiánu a diagonálnej matice s vlastnými číslami – využijeme tým množstvo núl v matici:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = (-\beta - \lambda)[(-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda) - \sigma \rho] \quad (3.4)$$

$$P(\lambda) = (-\beta - \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]$$

Riešením charakteristickej rovnice v stacionárnom bode  $E(0,0,0)$  je vlastné číslo a parametre  $\lambda_1 = -\beta$ , a ďalšie riešenia závisia od koeficientov  $p = 1 + \sigma$ ,  $q = \sigma(1 - \rho)$ .

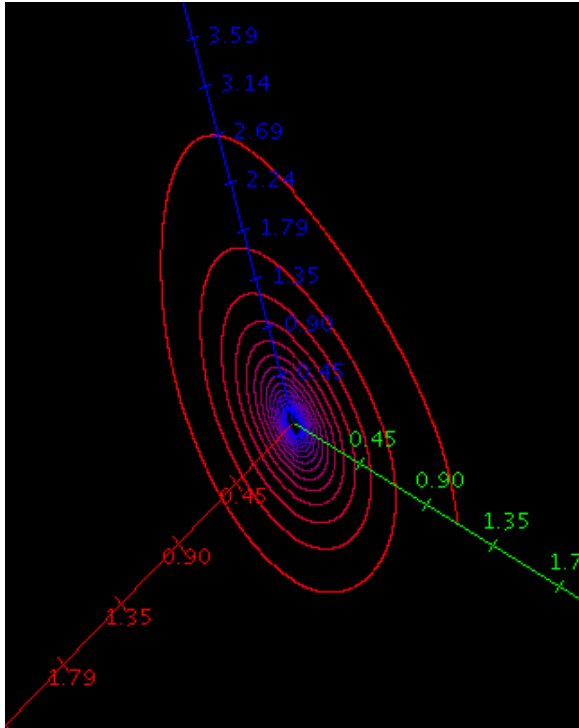
Pre každý typ bodu existuje kombinácia parametrov  $\sigma, \beta, \rho$  (neuvádzame všetky kombinácie parametrov, pretože je ich veľa a typy bodov sa opakujú):

	Typ stacionárneho bodu	Podmienka pre p, q	Podmienka pre parametre	Následok podmienky
1	Attraktor	$p > 0, q > 0$	$\beta > 0 \quad \rho < 1 \quad \sigma > 0$	$\Re(\lambda_{2,3}) < 0 \wedge \lambda_1 < 0$
2	Repeller	$p < 0, q > 0$	$\sigma < -1 \quad \rho > 0 \quad \beta < 0$	$\Re(\lambda_{2,3}) > 0 \wedge \lambda_1 > 0$
3	Sedlový bod	$q < 0$	$\rho > 1 \quad \sigma > 0$	$\Re(\lambda_2) < 0, \quad \Re(\lambda_3) > 0$

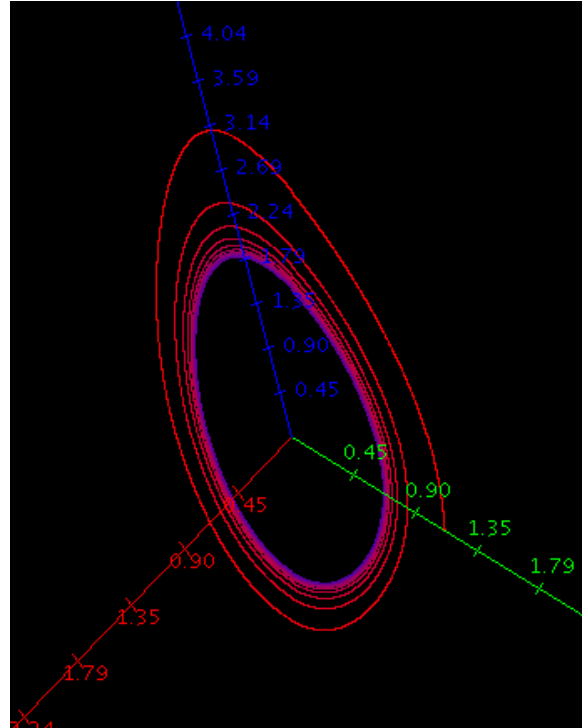
Exaktný dôkaz vlastností Hopfovej bifurkácie nie je v takomto systéme triviálna záležitosť, preto sa ním zaoberať nebudeme. Pre určité špeciálne prípady parametrov pre všetky tri stacionárne body ho možno nájsť v [5]. Pre naše účely nájdeme parametre pri ktorých prichádza k Hopfovej bifurkácii jednoduchou úvahou. Vlastnosti, či je bifurkácia subkritická alebo superkritická, si overíme pomocou numerickej simulácie.

Pri hľadaní podmienok, keď dochádza k bifurkácii môžeme vychádzať z definície Hopfovej bifurkácie ako straty stability stacionárneho bodu (atraktora) pričom vlastné čísla Jakobiánu pretínajú imaginárnu os. Budeme teda hľadať také hraničné podmienky, pri ktorých má charakteristická rovnica

$P(\lambda) = (-\beta - \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]$  dve komplexne združené rýdzo imaginárne riešenia. Táto podmienka bude splnená, ak platí  $(\sigma + 1) = 0 \wedge \sigma(1 - \rho) > 0$  (vtedy rovnica  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  prejde do tvaru  $\lambda^2 + q = 0$  pre  $q > 0$ ) Odtiaľ dostávame podmienky  $\sigma = -1 \wedge \rho > 1$ . Súčasne musí platiť, že v jednej z oblastí, ktoré hraničná hodnota  $\sigma = -1$  oddeľuje, musí byť stacionárny bod  $E(0,0,0)$  stabilný – všetky vlastné čísla musia mať záporné reálne časti. Odtiaľ podmienka  $\beta > 0$ . Teraz už ľahko môžeme ukázať, že ak platia podmienky  $\sigma < -1 \wedge \rho > 1 \wedge \beta > 0$ , stacionárny bod  $E(0,0,0)$  je stabilný a pri hraničnej hodnote  $\sigma = -1$  pretínajú korene charakteristickej rovnice imaginárnu os. Za týchto podmienok dochádza k Hopfovej bifurkácii. Numerickej simulácia predpoklad overuje.



Obr. 13: Fázový diagram Lorenzovho modelu pri parametroch, pri ktorých je bod  $(0,0,0)$  atraktorom



Obr. 12: Fázový diagram Lorenzovho modelu pri parametroch, pri ktorých okolo stredu  $(0,0,0)$  existuje limitný cyklus

Obrázky 12 a 13 ukazujú Hopfova bifurkácia pri Lorenzovom systéme. Vľavo fázový diagram pri parametroch  $\sigma = -0.95$   $\rho = 2$   $\beta = 3$ , keď počiatok súradnicovej sústavy  $E(0,0,0)$  je atraktor. Vpravo simulácia s parametrami  $\sigma = -1.05$   $\rho = 2$   $\beta = 3$ , pri ktorých je stacionárny bod nahradený limitným cyklom. Obidve simulácie vychádzajú z počiatočného bodu  $(0, 1.1, 0)$ . Bifurkácia nastáva pri hodnote parametra  $\sigma = -1$ .

## 4 Kaldorov model

Kaldorov model obchodných cyklov (Kaldor model of business cycles) je jedným z prvých a najjednoduchších modelov. Napriek tomu je však veľmi vhodný a názorný príklad na ktorom možno pozorovať správanie nelineárnych diskretných systémov. Zaoberajú sa ním mnohé štúdie, jednou je aj [4], ktorá obsahuje odkazy na množstvo ďalších.

Kaldorov model predpokladá, že globálna ponuka (produkcia)  $Y$  všetkých firiem na trhu má svoj ekvivalent v podobe príjmu a generuje dopyt po spotrebe  $C$  ako aj dopyt po investíciách  $I$ , ktoré závisia jedine od aktuálnej ponuky  $Y$  a kapitálových rezerv  $K$ . Je tiež známe, že firmy svoju produkciu  $Y$  upravujú podľa aktuálneho presahu dopytu  $C+I$  nad ponukou. Tieto predpoklady možno formálne vyjadriť pomocou nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= Y_t + \mu(C_t + I_t - Y_t) = Y_t + \mu(I_t - S_t) \\ K_{t+1} &= (1 - \delta)K_t + I_t \\ S &= Y - C \\ \mu &> 0, \quad 0 < \delta < 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Konštanta  $\mu$  vyjadruje rýchlosť prispôsobenia ponuky voči dopytu – ak je príliš nízka, znamená buď vysokú obavu z rizík alebo určité monopolné postavenie na trhu – ak je príliš vysoká znamená príliš prudké reakcie ktoré môžu byť spôsobené vysokým konkurenčným tlakom, alebo sklonom znášať vyššie riziká.  $S$  reprezentuje úspory, konštanta  $\delta$  vyjadruje starnutie (amortizáciu) kapitálu. Kaldor predpokladal, že pre danú hodnotu  $K$ , totálna marginálna náklonnosť mínať prostriedky  $\partial C/\partial Y + \partial I/\partial Y$  je pri normálnej produkcii väčšia ako jedna resp. menšia ako jedna pre vysoké resp. nízke úrovne produkcie. Vyjadriť to možno pomocou funkcie úspor  $S = Y - C$  (rozdiel medzi príjmom a spotrebou) proporcionálnej k príjmom  $S = \sigma Y$ , kde  $\sigma \equiv 1 - \partial C/\partial Y$  je konštantná miera sklonu k šetreniu úspor. V mnohých modeloch sa používa nelineárna funkcia úspor, avšak kvôli jednoduchosti postačuje aj obyčajná lineárna závislosť. Ďalším predpokladom je, že dopyt po investíciách je funkcia sigmoidálneho tvaru pri ľubovoľnej hodnote kapitálu pričom ak rastú kapitálové rezervy, klesá dopyt po investíciách a naopak. Najjednoduchší matematický model, ktorý umožňuje toto simulovať je navrhnutý v práci [4] nasledovne:

$$\begin{aligned} S_t &= \sigma Y_t \\ I_t &= \sigma \alpha + \gamma \left( \frac{\sigma \alpha}{\delta} - K_t \right) + \arctan(Y_t - \alpha) \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde koeficient  $\sigma \equiv 1 - \partial C/\partial Y$ ,  $0 < \sigma < 1$  reprezentujú sklon k úsporám,  $\alpha$  reprezentuje “normálnu” úroveň príjmu (exogénne danú ako očakávania firiem) a  $\sigma * \alpha / \delta$  je “normálna” úroveň kapitálu. Druhá rovnica v (4.2) teda vyjadruje, že dopyt po investíciách je zložený z troch členov - prvý je úroveň očakávaných úspor (keďže  $Y_t^e = \alpha$  je očakávaný príjem a  $\sigma$  je sklon k úsporám), druhý je rozdiel normálnej úrovne kapitálových rezerv a aktuálnych, pričom úmeru vyjadruje koeficient  $\gamma$ , ktorý je vlastne rýchlosť prispôsobovania, a tretí člen je rastúca funkcia sigmoidálneho tvaru, ktorá závisí od rozdielu aktuálneho príjmu a “normálnej” hodnoty. Dosadením týchto rovníc do pôvodného modelu dostávame dvojrozmerný nelineárny diskretný dynamický systém:

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} &= Y_t + \mu \left[ \sigma \alpha + \gamma \left( \frac{\sigma \alpha}{\delta} - K_t \right) + \arctan(Y_t - \alpha) - \sigma Y_t \right] \\
K_{t+1} &= (1 - \delta) K_t + \sigma \alpha + \gamma \left( \frac{\sigma \alpha}{\delta} - K_t \right) + \arctan(Y_t - \alpha)
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

Tento dynamický systém obsahuje jeden exogénne daný “normálny” alebo stacionárny bod  $(\alpha, \sigma \alpha / \delta)$  a podľa hodnôt ostatných parametrov môže obsahovať aj viacero ďalších stacionárnych bodov. V ďalšej časti sa budeme venovať analýze tohto modelu pri zmysluplných hodnotách parametrov. Systém obsahuje 4 parametre

- $\gamma$  koeficient prispôsobovania medzi normálnou ak aktuálnou kapitálovou rezervou
- $\delta$  starnutie, amortizácia kapitálu
- $\mu$  rýchlosť prispôsobovania sa firmám dopytu
- $\sigma$  koeficient sklonu ku kumulácii úspor, šetrenia

Budeme predpokladať, že parametre  $\gamma$  a  $\delta$  sú konštantné, venovať sa budeme iba stavovému priestoru parametrov  $\sigma$  a  $\mu$ ,

$$\Omega = \{(\mu, \sigma) : \mu > 0, 0 < \sigma < 1\} \tag{4.4}$$

Zaujímavé je, že systém je invariantný voči parametru  $\mu$ . Ukázať sa to dá pomocou jednoduchšej substitúcie, tak aby sa stacionárny bod  $(\alpha, \sigma \alpha / \delta)$  posunul do bodu  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
x_t &= K_t - \frac{\sigma \alpha}{\delta} \\
y_t &= Y_t - \alpha \\
x_{t+1} &= (1 - \gamma - \delta) x_t + \arctan(y_t) \\
y_{t+1} &= -\mu \gamma x_t + (1 - \mu \sigma) y_t + \mu \arctan(y_t)
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Je zrejmé že topológia tohto systému je identická s topológiou pôvodného, keďže ide o ekvivalentnú operáciu, inverznou substitúciou môžeme dostať naspäť pôvodný systém. V novom systéme však parameter  $\alpha$  nevystupuje. Tento parameter iba posúva celú sústavu z počiatku do iného bodu a na topológiu nemá žiadny vplyv. Systém je súmerný podľa rovnovážneho bodu v počiatku, z toho vyplýva, že aj trajektória, ktorá vznikne pri simulácii bude symetrická.

### Stacionárne body:

Stacionárne body modelu (4.3) sú riešenia sústavy rovníc po dosadení  $K_{t+1} = K_t, Y_{t+1} = Y_t$ :

$$\begin{aligned}
\sigma \alpha + \gamma \left( \frac{\sigma \alpha}{\delta} - K \right) + \arctan(Y - \alpha) - \sigma Y &= 0 \\
\sigma \alpha + \gamma \left( \frac{\sigma \alpha}{\delta} - K \right) + \arctan(Y - \alpha) - \delta K &= 0
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

$$\begin{cases} K = \frac{\sigma}{\delta} Y \\ \frac{\sigma(\gamma + \delta)}{\delta} (Y - \alpha) = \arctan(Y - \alpha) \end{cases} \quad (4.7)$$

Prvá rovnica vyjadruje vzťah medzi hodnotami premenných K a Y, z druhej dostávame stacionárne body v miestach, kde sa lineárna funkcia  $z = \frac{(\gamma + \delta)\sigma}{\delta} (Y - \alpha)$  pretína s tangenciálou

$z = \arctan(Y - \alpha)$ . Pretínať sa môžu buď v jednom bode alebo v troch. Okrem počiatku sa pretínajú v ďalších bodoch iba v prípade, ak platí, že lineárna funkcia  $z = \frac{(\gamma + \delta)\sigma}{\delta} y$  rastie v počiatku

pomalšie ako tangenciálna  $z = \arctan(y)$ . Keďže platí  $\frac{d \arctan(x)}{dx}(0) = 1$ , smernica lineárnej funkcie musí byť väčšia ako 1. Môžeme preto vysloviť tvrdenie, že ak platí podmienka

$\sigma \geq \delta / (\gamma + \delta)$ , systém obsahuje iba jeden stacionárny bod v  $E^* = (\alpha, \alpha \frac{\sigma}{\delta})$ . V prípade ak

$\sigma < \delta / (\gamma + \delta)$ , systém obsahuje ďalšie stacionárne body  $P^* a Q^*$ , ktoré sú súmerné voči bodu

$E^* = (\alpha, \alpha \frac{\sigma}{\delta})$ . Ich polohy možno určiť pomocou nejakej numerickej metódy. Je dôležité si

uviesť, že z ekonomického hľadiska stacionárny bod E je interpretovaný ako úplný rovnovážny bod, keďže hodnoty kapitálu a príjmov odpovedajú očakávaniam, kým v ostatných rovnovážnych bodoch táto podmienka splnená nie je.

### Stabilita stacionárnych bodov:

Stabilita sa určí ako zvyčajne pomocou Jakobiánu sústavy, ktorý je nasledovný:

$$J(Y, K) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mu}{1 + (Y - \alpha)^2} - \mu \sigma & -\mu \gamma \\ \frac{\mu}{1 + (Y - \alpha)^2} & 1 - \delta - \gamma \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

V stacionárnom bode  $E^* = (\alpha, \alpha \frac{\sigma}{\delta})$  dostávame dosadením za y číslo 0 maticu:

$$J = \begin{bmatrix} 1 + \mu(1 - \sigma) & \mu \gamma \\ 1 & 1 - \delta - \gamma \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Z nej dostaneme charakteristickú rovnicu a konštanty p, q:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 + pz + q \\ p &= Tr(J), q = Det(J) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} p &= 2 + \mu(1 - \sigma) - (\delta + \gamma) \\ q &= (1 - \gamma - \delta)(1 - \mu \sigma) + \mu(1 - \delta) \end{aligned}$$

Podľa [4] postačujúca podmienka stability stacionárnych bodov je:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - p + q > 0 \\ P(-1) &= 1 + p + q > 0 \\ P(0) &= q < 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

(Tieto podmienky umožnia, aby koreň charakteristickej rovnice bol v jednotkovej kružnici na komplexnej rovine)

Po úpravách dostaneme z prvej nerovnice podmienky (4.11):

$$\sigma > \frac{\delta}{\delta + \gamma} \quad (4.12)$$

Je to rovnaká nerovnica, ako podmienka pre jeden stacionárny bod, z čoho vyplýva, že ak máme tri stacionárne body, tak stredný stacionárny bod E nemôže byť stabilný (nemôže byť atraktor).

Druhá nerovnica podmienky (4.11) má po úprave nasledovný tvar:

$$\mu(1 - \sigma)(2 - \delta) + \mu\sigma\gamma + 2(2 - \gamma - \delta) > 0 \quad (4.13)$$

Za predpokladu, že platí  $0 < \delta < 1, 0 < \sigma < 1, \mu > 0$ , podmienka (4.13) je vždy splnená, pokiaľ platí zároveň aj nerovnosť:

$$\gamma < 2 - \delta \quad (4.14)$$

Táto nerovnosť je splnená, keďže platí podmienka, že  $\gamma < 1$ , aby mala konštanta z ekonomického hľadiska zmysel.

Druhá nerovnica podmienky (4.11) po úprave:

$$\mu\sigma(1 - \gamma - \delta) > \mu(1 - \delta) - (\gamma - \delta) \quad (4.15)$$

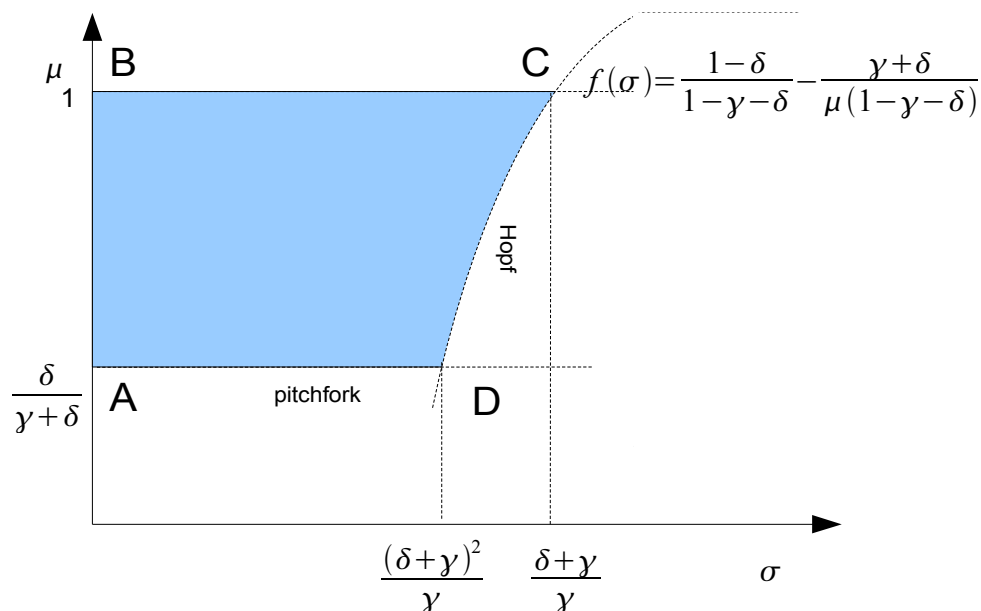
Ak platí, že  $\gamma + \delta < 1$  potom:

$$\sigma > \frac{1 - \delta}{1 - \gamma - \delta} - \frac{\gamma + \delta}{\mu(1 - \gamma - \delta)} \quad (4.16)$$

v opačnom prípade, teda  $\gamma + \delta > 1$  potom:

$$\sigma < -\frac{1 - \delta}{1 - \gamma - \delta} + \frac{\gamma + \delta}{\mu(1 - \gamma - \delta)} \quad (4.17)$$





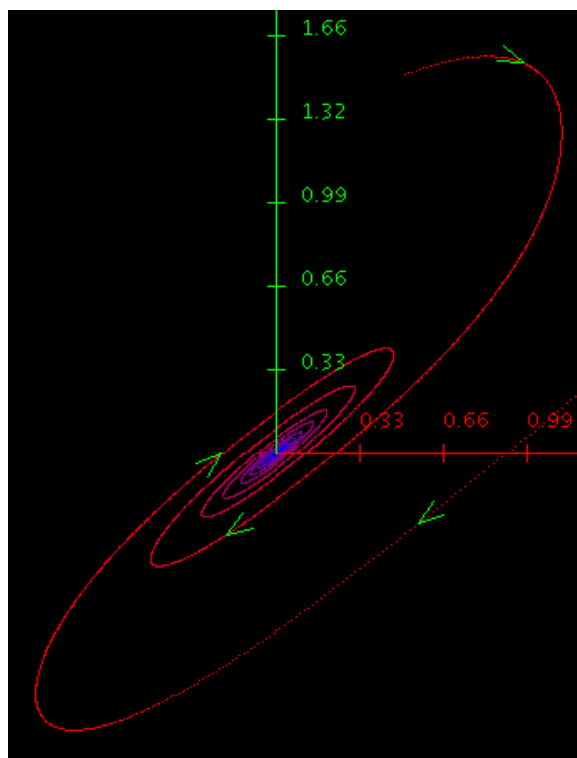
Obr. 14: Oblasť stability stacionárneho bodu  $(0,0)$  a bifurkácie na jej hraniciach

Na obrázku (14) je zobrazená oblasť, keď je stacionárny bod E stabilný a súčasne parametre systému majú aj ekonomickú interpretáciu. Dolná hranica regiónu stability je daná prvou nerovnicou. Horná hranica 1 je maximálna hodnota z definície parametra. Keď dosadíme hodnotu dolnej hranice  $\frac{\delta}{\gamma + \delta}$  do podmienok pre stabilitu systému, dostávame, že charakteristická rovnica (4.10) v bode 1 je rovná nule, teda jedno z vlastných čísiel je rovné 1. Keď hodnota parametra  $\sigma$  klesá, koreň charakteristickej rovnice opúšťa jednotkovú kružnicu, pôvodný stacionárny bod sa zmení zo stabilného na nestabilný a vzniknú ďalšie dva stacionárne body (keďže tangenciála v tom prípade pretína priamku v troch bodoch). Toto je typický príklad vidlovej bifurkácie. Keď  $\sigma = \frac{1 - \delta}{1 - \gamma - \delta} - \frac{\gamma + \delta}{\mu(1 - \gamma - \delta)}$ , teda na pravej hranici vyznačenej oblasti, dostávame determinant rovný 1, teda dva komplexne združené korene na jednotkovej kružnici. Pri variácii parametrov prejdeme cez hyperbolu na úseku CD, vlastné čísla prestávajú byť rýdzo imaginárne a vzniká Hopfova bifurkácia.

**Sumarizácia:**

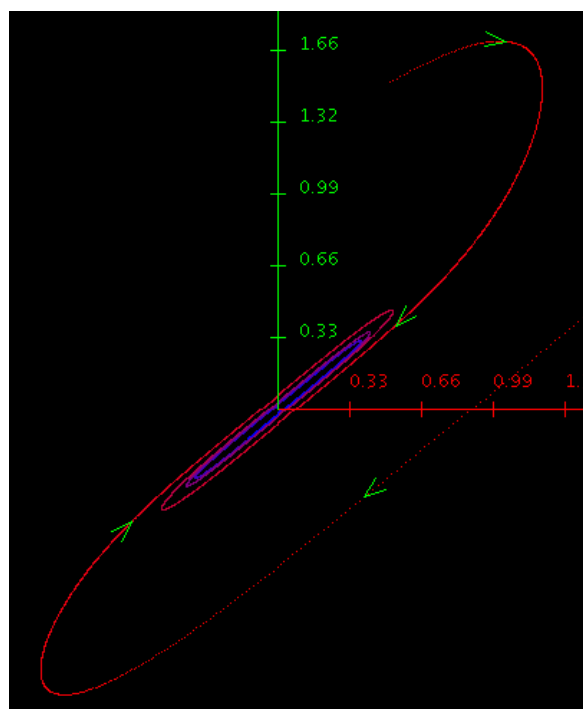
- Ak  $\sigma > \frac{\delta}{\delta + \gamma}$ , tak máme len 1 stacionárny bod  $E^* = (\alpha, \alpha \frac{\sigma}{\delta})$ , v opačnom prípade máme ešte ďalšie 2 symetrické stacionárne body ktorých hodnoty sa dajú spočítať iba numericky.
- Ak  $\gamma < 2 - \delta$ , a súčasne parametre  $\mu$  a  $\sigma$  sú vo vyznačenej oblasti ABCD na obr. (14), tak bod E je lokálne asymptoticky stabilný, ak pretne hranicu na úsečke AD, vzniká vidlová bifurkácia, ak na spojnici CD, vzniká Hopfova bifurkácia.

Na nasledujúcich obrázkoch je znázornený priebeh oboch bifurkácií, pričom v prvom prípade bifurkácia vzniká variáciou parametra  $s$ , kým v druhom sa mení parameter  $m$ . Všetky simulácie vychádzajú z počiatočných bodov  $(0.2, 0.2)$  a  $(-0.2, -0.2)$ , krok  $dt=0.02$  a rozsah oboch osí je 0.8289. Hodnoty parametrov modelu sú uvedené pri každom obrázku.



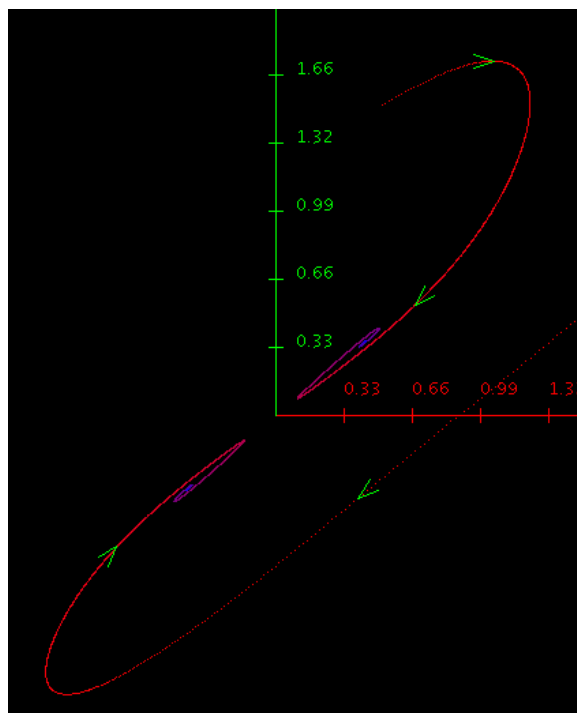
Obr. 15: Stabilný stacionárny bod v počiatku

$s=0.32;d=0.2;m=1.1;g=0.6$



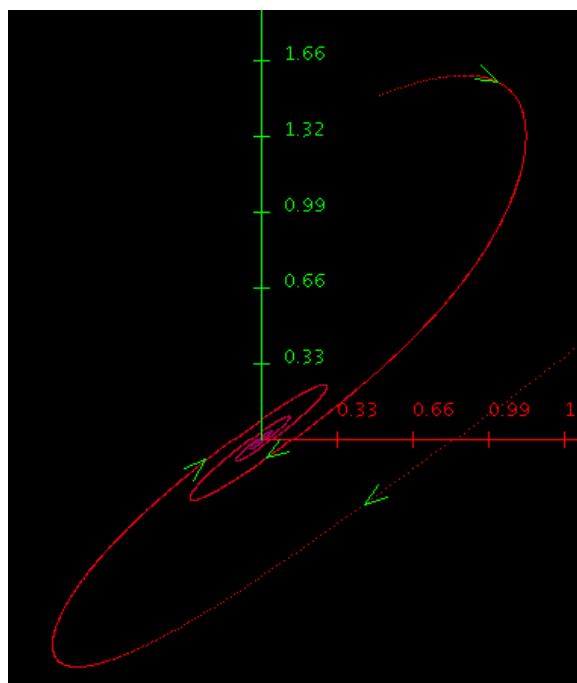
Obr. 17: Stacionárny bod v počiatku stráca stabilitu

$s=0.245;d=0.2;m=1.1;g=0.6;$

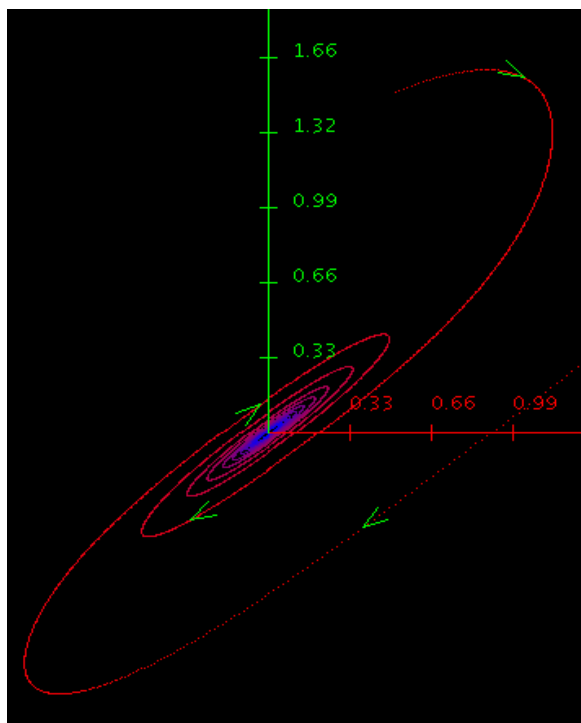


Obr. 16: Stacionárny bod v počiatku je nestabilný, vznikli 2 nové stabilné stacionárne body

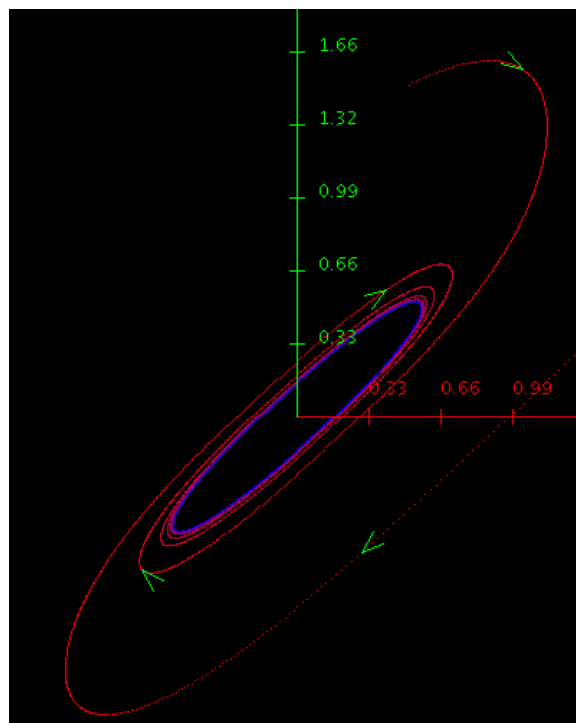
$s=0.24;d=0.2;m=1.1;g=0.6;$



*Obr. 18: Stacionárny bod v počiatku*  
 $s=0.3;d=0.2;m=0.99;g=0.6;$



*Obr. 20: Stacionárny bod v počiatku stráca stabilitu*  
 $s=0.3;d=0.2;m=1.1;g=0.6;$



*Obr. 19: Stacionárny bod zaniká a vzniká limitný cyklus*  
 $s=0.3;d=0.2;m=1.25;g=0.6;$

## 5 Záver

Práca približuje úvod do problematiky bifurkácií v nelineárnych dynamických systémoch. Rozoberá základné postupy pri analýze systému, hľadanie stacionárnych bodov a vyšetovanie ich stability. Rôzne typy stacionárnych bodov sú znázornené ako výstupy simulačného appletu. Ďalej sú priblížené základné typy lokálnych bifurkácií v jedno- resp. dvojrozmernom priestore. Globálne bifurkácie sú načrtnuté len okrajovo.

Na Lorenzovom modeli sú odvodené podmienky stability stacionárneho bodu v počiatku súradnicovej sústavy. Z hraničných podmienok sú úvahou určené hodnoty parametrov, pri ktorých dochádza k Hopfovej bifurkácii. Odvodené hodnoty sú podložené simuláciou, ktorá demonštruje vznik limitného cyklu.

Na Kaldorovom modeli obchodného cyklu je analyzovaná oblasť stability stacionárneho bodu v počiatku. Vidlová bifurkácia pri prekročení hraničnej hodnoty rýchlosti prispôsobovania produkcie k dopytu spôsobuje vznik ďalších dvoch stabilných stacionárnych bodov. Pri prekročení Hopf-Niemarkovej bifurkačnej krivky, pri ktorej prichádza k bifurkácii, vzniká stabilný limitný cyklus ktorý spôsobuje cyklické fluktuácie premenných modelu - produkcie a kapitálových rezerv. V tomto modeli vznikajú aj globálne homoklinické bifurkácie, keď systém obsahuje tri stacionárne body a limitný cyklus. Ďalšia analýza by bola možná pri uvažovaní ostatných parametrov, keďže celý systém je veľmi komplexný. Dokazujú to aj mnohé práce, ktoré sa stabilitou rôznych modifikácií Kaldorovho modelu zaoberajú.

## 6 Príloha: Technická dokumentácia k appletu SimApp

SimApp je simulačný applet napísaný v jazyku Jython, ktorý umožňuje simulovať diskkrétne (diskretizované) nelineárne dynamické systémy. Program je možné spustiť v ľubovoľnom prehliadači, ktorý podporuje virtuálny stroj Java (Java Virtual Machine). Dostupná je aj verzia spustiteľná v okne mimo prehliadača, ako aj priamo zo zdrojových kódov v interprete jazyka Jython.

Systémové požiadavky:

- Java Virtual Machine 1.5 a vyššie - dostupné na [java.sun.com](http://java.sun.com)
- Procesor Intel Pentium II a vyššie, 200 MB RAM
- Pre online verziu: prehliadač podporujúci Javu – Firefox, Safari, Opera, Internet Explorer
- Pre lokálne spúšťanú verziu zo zdrojových kódov – Interpret jazyka Jython
- 3-tlačítková myš s kolečkom

### ***Vlastnosti appletu***

Applet simuluje dynamické systémy, ktoré sú opísané sústavou maximálne piatich diferenciálnych rovníc. Rovnice obsahujú nastaviteľné konštanty a počet premenných rovný počtu rovníc. Využívať možno niekoľko zabudovaných základných matematických funkcií.

Zobrazovať je možné časový priebeh maximálne troch premenných v 3D priestore. Časová postupnosť sa znázorňuje ako zmena farby. Okrem ľubovoľného počtu trajektórií z ľubovoľných počiatočných bodov applet umožňuje aj zobrazit' vektorové pole na zadanej 2D rovine na obrazovke.

### **Používateľské rozhranie**

Graf možno otáčať, zmenšovať resp. zväčšovať a posúvať v 3D priestore. Posun v x-, resp. y-ovej osi sa ovláda posunom kurzora počas stlačenia ľavého tlačítka myši. Rotácia okolo zvislej osi sa ovláda pomocou vodorovného pohybu myšou počas podržania pravého tlačítka. Analogicky rotácia okolo vodorovnej osi sa ovláda pomocou zvislého pohybu pričom pravé tlačítko musí byť stlačené. Rotácia okolo vektora smerujúceho von, resp. do hĺbky obrazovky – teda rotácia v rovine obrazovky sa ovláda pomocou stlačenia stredného tlačítka myši a v zvislého pohybu. Otáčanie kolečka myši spôsobuje približovanie resp. vzdialovanie obrazu. Každá poloha sa dá zadať aj pomocou numerických hodnôt polohy v polárnej sústave, priblíženie pomocou rozsahu jednotlivých osí (môže byť v každom smere rozdielne) a posun pomocou hodnôt posunov v smeroch x a y. Tieto hodnoty možno zapísať resp. aktuálne vyčítať v nastaveniach.

V dolnej časti sa nachádzajú nasledovné tlačítka:

**Full Redraw** - úplné prekreslenie trajektórií - (počas pohybu sa prekresľuje len zjednodušená výpočtovo menej náročná simulácia)

**Reset View** - nastaví pôvodnú polohu grafu, ktorá je nastavená ako východzia

**Settings** - otvorí menu s nastaveniami simulácie

**Graph** - prepína vykresľovanie grafu na obrazovke

**Axes** - prepína vykresľovanie súradnicových osí na obrazovke

**Vectors** - prepína vykresľovanie vektorových polí na obrazovke

**Arrows** - prepína vykresľovanie šípok udávajúcich smer pohybu po trajektórii



Obr. 21: Hlavný panel appletu

Applet obsahuje niekoľko prednastavených modelov ktoré názorne ukazujú teoreticky rozoberané príklady. Tieto sa dajú vybrať pomocou voľby **Presets**.

Každé prednastavenie má 2 časti – Model a Render. Model obsahuje matematický model simulácie a Render obsahuje nastavenia pomocou ktorých sa simulácia vykreslí.

### Model

Do každého políčka možno zapisovať ľubovoľný text, avšak správny model musí spĺňať určité kritériá. V každom políčku, ktoré umožňuje zadávanie viacej hodnôt sa tieto oddeľujú bodkočiarkou, pokiaľ nie je výslovne uvedené inak. Na konci zoznamu bodkočiarka je povolená ale nie je nutná.

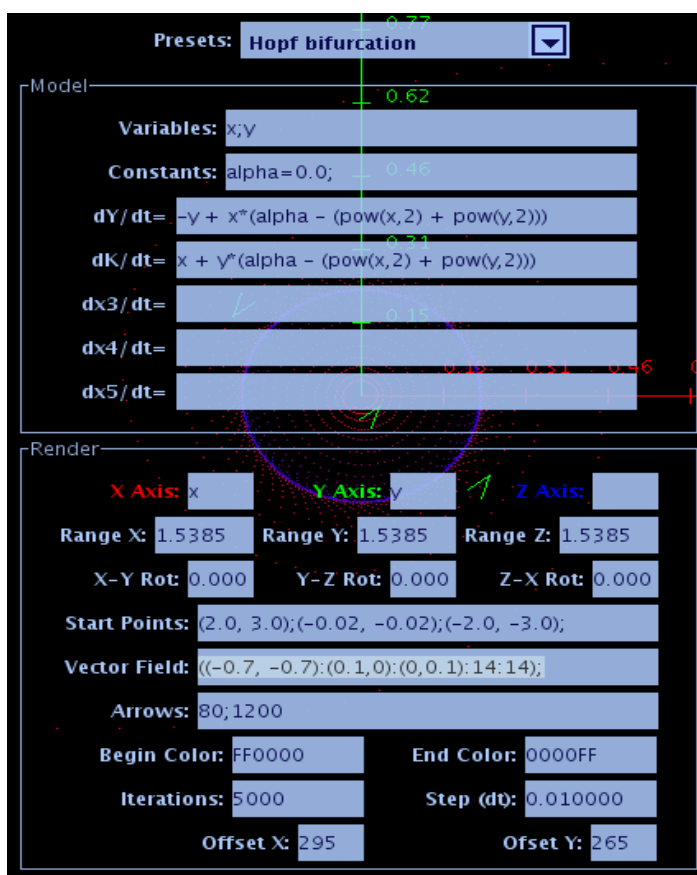
**Variables** - zoznam premenných modelu, oddelených bodkočiarkou, pričom názvy môžu byť jedno- aj viacpísmenkové. Zakázané sú názvy, ktoré sa vyskytujú inde, napr. - dt, názov konštanty

**Constants** - zoznam konštánt modelu, oddelených bodkočiarkou, pričom názvy môžu byť jedno- aj viacpísmenkové. Zabudované konštanty sú **e** (2.718281828) a **pi** (3.141592654). Zakázané sú názvy, ktoré sa vyskytujú inde, napr. - dt, názov premennej.

**dx1/dt ... dx5/dt** - diferenciálne rovnice opisujúce simulovaný model. Zapisujú sa len pravé strany, pre každú premennú musí byť definovaná rovnica. V rovniciach môžu vystupovať premenné a konštanty modelu, aritmetické operátory **+, -, /, \*** a nasledovné vstavané funkcie:

Funkcia	Popis
<b>acos (x)</b>	arkuskosínus (návratová hodnota v radiánoch)
<b>asin (x)</b>	arkussínus (návratová hodnota v radiánoch)
<b>atan (x)</b>	arkustangens (návratová hodnota v radiánoch)
<b>ceil (x)</b>	zakokrúhlenie na celé číslo nahor
<b>cos (x)</b>	kosínus (argument v radiánoch)
<b>cosh (x)</b>	hyperbolický kosínus (argument v radiánoch)
<b>exp (x)</b>	exponenciálna funkcia $e^x$
<b>log (x)</b>	prirodený logaritmus $\log_e$
<b>log10 (x)</b>	desiatkový logaritmus $\log_{10}$
<b>min (x, y)</b>	minimum z hodnôt x a y
<b>max (x, y)</b>	maximum z hodnôt x a y
<b>pow (x, y)</b>	mocnina $x^y$

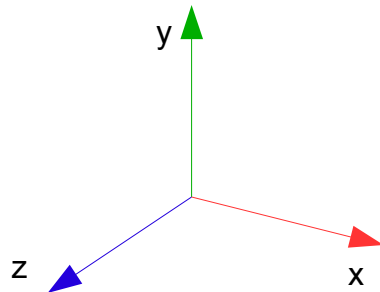
<b>sin(x)</b>	sínus (argument v radiánoch)
<b>sinh(x)</b>	hyperbolický sínus (argument v radiánoch)
<b>sqrt(x)</b>	odmocnina
<b>tan(x)</b>	tangens (argument v radiánoch)
<b>tanh(x)</b>	hyperbolický tangens (argument v radiánoch)
<b>fabs(x)</b>	absolútna hodnota čísla x
<b>floor(x)</b>	celá časť reálneho čísla x
<b>fmod(x,y)</b>	zvyšok po celočíselnom delení (aj pre reálne argumenty rozdiel max. celočíselného násobku čísla y, ktorý je menší ako číslo x a samotného čísla x napr. fmod(2.9, 0.9)=0.2)
<b>hypot(x,y)</b>	vráti euklidovskú dĺžku vektora $\sqrt{(x^2+y^2)}$
<b>ldexp(x,y)</b>	vráti mocninu $x*2^y$



Obr. 22: Nastavenia modelu v simulačnom applete

## Render

Táto časť obsahuje parametre vykreslenia trajektórií simulácie. Na vykresľovanie sa používa pravotočivá súradnicová sústava ako na obr. (23)



Obr. 23: Priradenie farieb pravotočivej súradnicovej sústave

**[X,Y,Z] Axis** - udáva, ktorá premenná bude vykreslená na ktorú os

**Range [X,Y,Z]** – rozsah vykresľovanej osi

**X-Y Rot** – rotácia v rovine X-Y voči osi x v pravotočivom smere

**Y-Z Rot** – rotácia v rovine X-Y voči osi y v pravotočivom smere

**Z-X Rot** – rotácia v rovine X-Y voči osi z v pravotočivom smere

**Start points** - Počiatočné podmienky zapísané ako vektory rovnakej dimenzie ako model oddelené bodkočiarkou, vektory uzavreté v oblých zátvorkách a prvky oddelené čiarkou – pr. (2.1, 3.2);(0, 2.1);

**Vector Field** – Vektorové polia v ktoré zobrazia smernicu modelu v danom bode. Špecifikované sú ako n-tice oddelené bodkočiarkou, prvky n-tice oddelené dvojbodkou, pričom prvé 3 prvky sú vektory rovnakej dimenzie ako model, ďalšie dva sú skaláry

(počiatočný\_bod : vektor\_A : vektor\_B : nasobnosť\_A : nasobnosť\_B)

riadok pole sa vytvára tak, že k počiatočnému bodu sa pripočítava vektor\_A 0 až nasobnosť\_A -krát, potom sa pridá vektor\_B a vytvorí sa ma ďalší riadok, proces sa opakuje nasobnosť\_B-krát, takto dostaneme maticu

Príklad:

((0,0):(0.5,0):(0,0.5):10:10);

Štvorcová mriežka s krokom 0.5 v X aj Y-ovej osi, na rozsahu 0-5.

**Arrows:** Poradie iterácií, v ktorých sa má smernica zobrazit' pomocou šípky

**Begin/End color** – Počiatočná/Koncová farba trajektórie

**Iterations** – počet iterácií v jednej trajektórii

**Step** – krok pri diskretizovaní modelu, pri jednej iterácii

**Offset X/Y** – posun v x, resp Y-ovej osi



## 7 Literatúra:

- [1] Agliari, A., Gardini L., Puu T.: Some global bifurcations related to the appearance of closed invariant curves, *Mathematics and Computers in Simulation* Volume 68, Issue 3, , 1 May 2005, Pages 201-219.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V0T-4F9MTM6-1/2/46fdc40c95a4ce037023ade29064ba2b>
- [2] Asada T., Douskos Ch., Markellos P.: *Numerical Exploration of Kaldorian Macrodynamics: Hopf- Neimark Bifurcations and Business Cycles with Fixed Exchange Rates*, 2007
- [3] Buša J., Hnatič M.: *Chaos, úvod do problematiky*, 2004
- [4] Bischi G.I., Dieci R., Rodano G., Slatari E.: *Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model*, 2001
- [5] Dieci R., Sordi S., Vercelli A.: *Financial Fragility and Complex Dynamics: Analysing the Impact of Stabilizing Policy Measures*, 2005
- [6] Roth V.: *Computation and Visualisation of Bifurcation Diagrams for Non-Invertible 3D Maps* Rigorous Thesis, 2006 <http://www.roth.sk/vis/RT/>
- [7] Voorn G.: *PhD mini course: Introduction to bifurcation analysis*, 2006
- [8] Weisstein, Eric W. : *MathWorld -- A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/>
- [9] Wiens E. G.: *Egwald Mathematics: Nonlinear Dynamics*  
<http://www.egwald.com/nonlineardynamics/>
- [10] Yan, Z.: *Hopf bifurcation in the Lorenz-type chaotic system*, *Chaos, Solitons & Fractals* Volume 31, Issue 5, , March 2007, Pages 1135-1142.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ4-4KCRS9B-1/2/d464efc3d22a664e561d8d3cbbcaab5d>